

Модель Поттса на решетке Бете во внешнем поле
Potts model on a Bethe lattice in the external field

Сергей Викторович Сёмкин
Sergey Viktorovich Semkin

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса. Россия. Владивосток.
Vladivostok State University Economics and Service. Russia. Vladivostok.
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий и систем
E-mail: Li15@rambler.ru Тел. 2297043
ул. Гоголя, 41, г. Владивосток, Приморский край, Россия, 690014

Виктор Павлович Смагин
Viktor Pavlovich Smagin

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса. Россия. Владивосток.
Vladivostok State University Economics and Service. Russia. Vladivostok.
докт. физ.-мат. наук, зав. лаб. Геофизических полей
E-mail: Li15@rambler.ru Тел. 2423332
ул. Гоголя, 41, г. Владивосток, Приморский край, Россия, 690014

Получено решение для модели Поттса с произвольным числом состояний на решетке Бете в ненулевом внешнем поле. Построена линия фазовых переходов первого рода на плоскости «температура – внешнее поле», заканчивающаяся точкой фазового перехода второго рода. Найдена величина скачка «намагниченности» на линии фазовых переходов.

The solution for the Potts model with an arbitrary number of states on the Bethe lattice in a non-zero external field is obtained. The line of phase transitions of the first order on the plane "temperature - external field" is found. This line has the ends point of a phase transition of the second order. The "magnetization" jump on the line of phase transitions is found.

Ключевые слова и словосочетания: фазовые переходы, модель Поттса, решетка Бете
Keywords: phase transitions, Potts model, Bethe lattice

1. Введение

Модель Поттса [1] - одна из наиболее часто используемых моделей в статистической физике и она является теоретическим инструментом, применяемым для изучения широкого класса явлений в физике конденсированных сред [2, 3]. Кроме того, модель Поттса используется в задачах, возникающих в ядерной физике [4-6]. Точных результатов для модели Поттса существует немного. Известно, что если число спиновых состояний в модели Поттса больше некоторого критического значения (зависящего от размерности решетки), то в отсутствие внешнего поля наблюдается фазовый переход первого рода, а если меньше – второго рода [1, 3, 4]. Фазовый переход в модели Поттса в отсутствие внешнего поля неоднократно рассматривался как для чистого магнетика [1 – 4], так и для магнетика с немагнитными примесями [7, 8].

Однако несомненный интерес представляет и критическое поведение модели Поттса в присутствии внешнего поля [5, 6]. Поэтому в настоящей работе мы рассмотрим модель Поттса с произвольным числом состояний на решетке Бете во внешнем поле. И хотя решетка Бете лишь условно сопоставима с реальными кристаллическими решетками, она обладает тем преимуществом, что модель Поттса во внешнем поле может быть решена на этой решетке точно.

2. Фазовые переходы в модели Поттса во внешнем поле

Модель Поттса [1] формулируется следующим образом. Рассмотрим некоторую регулярную решетку. Каждому узлу поставим в соответствие величину σ_i («спин») которая может принимать s различных значений, скажем $1, 2, \dots, s$. Два соседних спина σ_i и σ_j взаимодействуют с энергией $-J_p \delta(\sigma_i, \sigma_j)$ где

$$\delta(\sigma_i, \sigma_j) = \begin{cases} 1, & \sigma_i = \sigma_j \\ 0, & \sigma_i \neq \sigma_j \end{cases}$$

Пусть есть внешнее поле $H > 0$, которое действует на состояние 1. Тогда полная энергия равна

$$E = -J_p \sum_{(i,j)} \delta(\sigma_i, \sigma_j) - H \sum_i \delta(\sigma_i, 1). \quad (1)$$

Решение задачи с гамильтонианом (1) заключается, в частности, в определении величин p_i – доли спинов, находящихся, при тепловом равновесии, в состоянии i . Эту задачу сравнительно просто можно решить для решетки Бете – дерева без замкнутых путей, воспользовавшись методом, описанным в [1]. Решетку Бете с произвольным координационным числом q построим следующим образом. Рассмотрим «центральный» узел решетки со спином σ_0 . q соседей этого узла образуют первую оболочку, $q - 1$ «внешних» (кроме центрального) соседей каждого узла первой оболочки образуют вторую оболочку и так далее до N -ой оболочки. Тогда

$$p_i = \frac{\sum_{\{\sigma\}} \delta(\sigma_0, i) P(\{\sigma\})}{Z} \quad (2)$$

где

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} P(\{\sigma\}), \quad P(\{\sigma\}) = \exp(K \sum_{(i,j)} \delta(\sigma_i, \sigma_j) + h \sum_i \delta(\sigma_i, 1)),$$

$K = J_p/kT$, $h = H/kT$, k - постоянная Больцмана, T - температура. Представим $P(\{\sigma\})$ в виде:

$$P(\{\sigma\}) = e^{h\delta(\sigma_0, 1)} \prod_{j=1}^q \exp(K\delta(\sigma_0, \sigma_1^{(j)}) + K \sum_{(l,n)} \delta(\sigma_l^{(j)}, \sigma_n^{(j)}) + h \sum_l \delta(\sigma_l^{(j)}, 1)),$$

где $\sigma^{(j)}$ - совокупность спинов j -ой ветви. Тогда

$$Z = \sum_{\sigma_0} e^{h\delta(\sigma_0, 1)} (G_N(\sigma_0))^q, \\ G_N(\sigma_0) = \sum_{\sigma^{(j)}} \exp(K\delta(\sigma_0, \sigma_1^{(j)}) + K \sum_{(l,n)} \delta(\sigma_l^{(j)}, \sigma_n^{(j)}) + h \sum_l \delta(\sigma_l^{(j)}, 1)). \quad (3)$$

Используя эти выражения в (2) и обозначив $x_{N,k} = G_N(k)/G_N(1)$, ($k = 2, 3, \dots, s$) получим

$$p_1 = \frac{e^h}{e^h + \sum_k x_{N,k}^q}, \quad p_j = \frac{x_{N,j}^q}{e^h + \sum_k x_{N,k}^q}, \quad j > 1, \quad (4)$$

а представив (3) в виде

$$G_N(\sigma_0) = \sum_{\sigma_1} e^{K\delta(\sigma_0, \sigma_1) + h\delta(\sigma_1, 1)} (G_{N-1}(\sigma_1))^{q-1},$$

получим рекуррентные соотношения для величин $x_{N,k}$

$$x_{N,k} = \frac{e^{h+e^k} x_{N-1,k}^{q-1} + \sum_{j \neq k} x_{N-1,j}^{q-1}}{e^{K+h} + \sum_j x_{N-1,j}^{q-1}}. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь предельный переход $N \rightarrow \infty$. Как известно [1] такой переход на решетке Бете осложняется тем, что число граничных узлов решетки пропорционально при больших N полному числу узлов. Поэтому следует различать задачи для полной решетки Бете вместе с граничными

узлами (дерево Кейли) и внутренней части решетки – собственно, решетки Бете. Мы рассмотрим решение для внутренней части и, в связи с этим, будем полагать, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_{N,k} = \lim_{N \rightarrow \infty} x_{N-1,k} = x_k.$$

Кроме того, будем искать такое решение, когда все p_j при $j > 1$ равны между собой. Согласно (4) это значит, что $x_k = x$ для всех k . Тогда из (4) и (5) получим

$$p_1 = \frac{e^h}{e^{h+(s-1)x^q}}, \quad (6)$$

$$x = F(K, h, x) = \frac{e^h + (e^K + s - 2)x^{q-1}}{e^{K+h+(s-1)x^{q-1}}}. \quad (7)$$

Таким образом, значение p_1 определяется корнем уравнения (7) $x(K, h)$. Поскольку уравнение (7) получено предельным переходом из рекуррентного уравнения (5), его решение должно быть устойчивым в том смысле, что рекуррентная процедура $x_n = F(K, h, x_{n-1})$ должна сходиться к решению. То есть, при $x = x(K, h)$ должно выполняться условие $\frac{\partial F(K, h, x)}{\partial x} \leq 1$. Если у уравнения (7) существует несколько устойчивых решений, следует выбрать то из них, которое ближе к единице, поскольку $x_{0,k} = 1$. Анализ (7) показывает, что этот критерий выбора корня дает функцию $x(K, h)$ непрерывную на плоскости (K, h) всюду, кроме точек некоторой кривой $h = h_c(K)$. Эта кривая и является линией фазовых переходов первого рода, поскольку $p_1 = -\frac{\partial f}{\partial h}$, где f - свободная энергия на один узел решетки, а скачек $x(K, h)$ означает, согласно (6), скачек p_1 . Она начинается в точке $(K_0, 0)$, где K_0 точка фазового перехода для модели Поттса на решетке Бете без внешнего магнитного поля [2], и заканчивается в точке (K_e, h_e) , в которой фазовый переход является переходом второго рода.

В соответствии со сказанным выше, для точек линии $h = h_c(K)$ должны выполняться условия

$$x = F(K, h, x), \quad \frac{\partial F(K, h, x)}{\partial x} = 1.$$

Используя (7), получим

$$\begin{aligned} e^h + (e^K + (s-2))x^{q-1} &= xe^{K+h} + (s-1)x^q, \\ (q-1)(e^K + (s-2))x^{q-2} - (q-1)(s-1)x^{q-1} &= e^{K+h} + (s-1)x^{q-1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x^2 - \left(\frac{(q-2)(e^K + s - 2)}{q-1} + \frac{q}{q-1} e^{-K} \right) x + \frac{e^{K+s-2}}{s-1} e^{-K} = 0, \quad (8)$$

и

$$e^h = \frac{(s-1)x^q - (e^K + (s-2))x^{q-1}}{1 - xe^K}. \quad (9)$$

Начальная точка линии (K_0, h_0) определяется условием $h_0 = 0$. Это приводит к $x_0 = 1$ и

$$e^{K_0} = \frac{s}{q-2} + 1, \quad (10)$$

что совпадает с известным результатом [2] для модели Поттса на решетке Бете в отсутствии внешнего поля. Конечная точка линии (K_e, h_e) определяется условием исчезновения вещественных корней у квадратного уравнения (8). Это условие приводит к

$$e^{K_e} = \frac{1}{2} \left[-(s-2) + \sqrt{(s-2)^2 + \frac{4q^2(s-1)}{(q-2)^2}} \right], \quad (11)$$

$$e^{h_e} = (s - 1) \left(\frac{(q-2)(e^{K_e+s-2})}{q(s-1)} \right)^q, \quad (12)$$

а из (6) следует, что в точке (K_e, h_e) $p_1 = 1/2$.

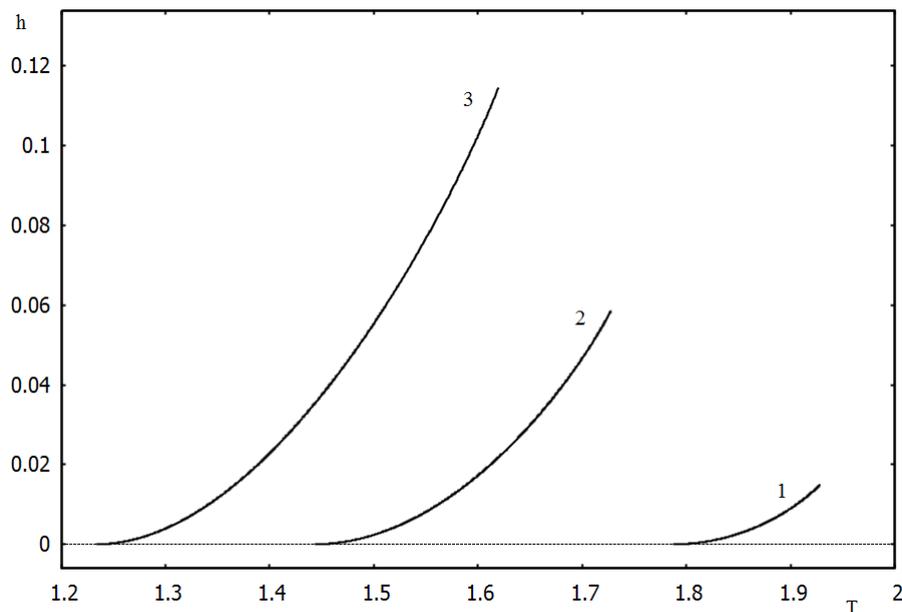


Рис. 1. Линии фазовых переходов первого рода для модели Поттса с s состояниями на решетке Бете с координационным числом $q = 6$. Кривая 1 - $s = 3$, кривая 2 - $s = 4$ и кривая 3 - $s = 5$. По горизонтальной оси температура $T = 1/K$, по вертикальной - внешнее поле h .

В работе [6] найдена конечная точка линии фазовых переходов первого рода на плоскости (K, h) для модели Поттса с тремя состояниями на трехмерной кубической решетке $(K_e, h_e) = (0.54938(2), 0.000775(10))$. Вычисление по формулам (11), (12) при $s = 3$ и $q = 6$ дает $(K_e, h_e) = (0.51847, 0.01514)$. То есть, значение K_e довольно близко к полученному в [6], но значение h_e заметно отличается. В более ранней работе [5] положение конечной точки линии фазовых переходов первого рода для модели Поттса с тремя состояниями было найдено в приближении среднего поля. Для кубической решетки было получено $K_e = 4/9$ и $h_e = \ln 2 - 2/3 \approx 0,02648$.

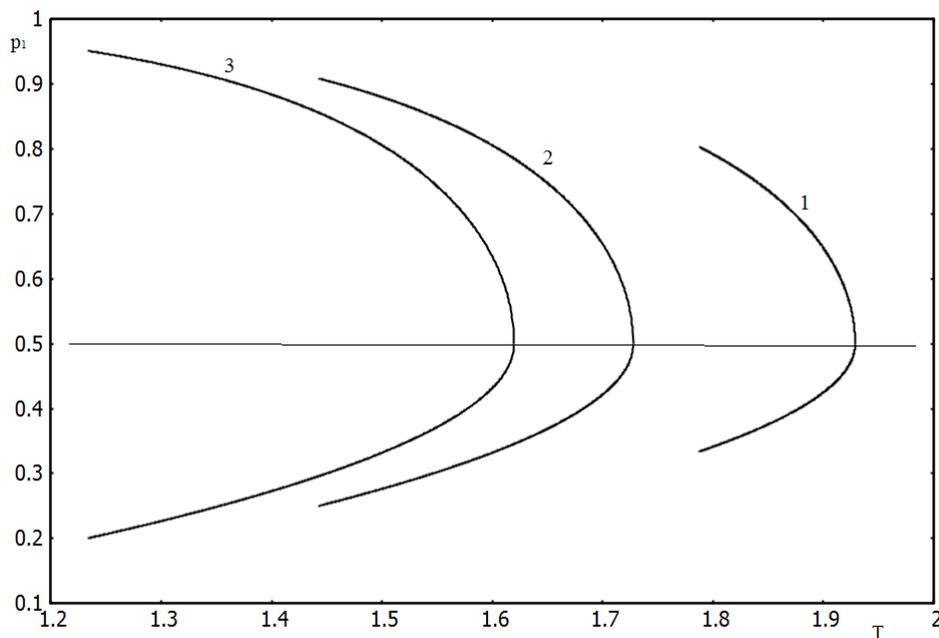


Рис. 2. Скачок вероятности p_1 на линиях фазовых переходов в модели Поттса с s состояниями на решетке Бете с координационным числом $q = 6$ в зависимости от температуры. Кривая 1 - $s = 3$, кривая 2 - $s = 4$ и кривая 3 - $s = 5$. По горизонтальной оси температура $T = 1/K$, по вертикальной - вероятность p_1 .

На рис. 1 показаны линии $h = h_c(T)$ ($T = 1/K$) для $q = 6$ и $s = 3,4,5$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). Видно, что T_0 и T_e – температуры начальной и конечной точек линии уменьшаются с ростом s , а величина h_e растет. (При $s = 2$, когда модель Поттса переходит в модель Изинга, вся кривая $h = h_c(T)$ вырождается в единственную точку фазового перехода второго рода.)

На рис. 2 показаны значения p_1 вблизи линии $h = h_c(T)$ при $q = 6$ и $s = 3,4,5$ (кривые 1, 2, 3 соответственно) в зависимости от $T \in [T_0, T_e]$. Каждая из кривых имеет две ветви – нижняя ($p_1 < 1/2$) соответствует $h = h_c(T) - 0$, а верхняя ($p_1 > 1/2$) - $h = h_c(T) + 0$. Величина скачка p_1 падает от максимального значения при $T = T_0$ до нуля при $T = T_e$.

Литература

1. Р. Бэкстер, Точно решаемые модели в статистической механике, Мир, Москва (1985), 486 с..
2. F.Y. Wu, Rev. Mod. Phys., Т.54(1), 235 (1982)
3. А.К. Муртазаев, А.Б. Бабаев, Г.Я. Азнаурова, ФТТ, т. 50(4), 703 (2008)
4. W. Janke, R. Villanova, Nucl. Phys. B 489, 679 (1997)
5. T.A. DeGrand, C. DeTar, Nucl. Phys. B 225, 590 (1983)
6. F. Karsch, S. Stickan, Phys. Lett. B 488, 319 (2000)
7. С.В. Сёмкин, В.П. Смагин, ФТТ, 57(5), 926 (2015)
8. С.В. Сёмкин, В.П. Смагин, ЖЭТФ, 148, 4(10), 729(2015)

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по заданию № 2014/292 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части государственного задания