DOI dx.doi.org/10.24866/VVSU/2073-3984/2020-1/105-114

УДК 531.19

С. В. Сёмкин[1]

В. П. Смагин[2]

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
Владивосток. Россия

Асимптотическое поведение восприимчивости и намагниченности разбавленного изинговского магнетика

Известно, что свойства разбавленных и неупорядоченных магнетиков отличаются от свойств чистых магнетиков. Однако точных решений для моделей магнитных систем с разбавлением до сих пор не получено. Поэтому имеет смысл построение приближенных решений для разбавленных магнетиков. Некоторые из этих решений можно построить с помощью усреднения по полям взаимодействия.

Применение функции распределения по полям взаимодействия к изучению свойств системы многих взаимодействующих частиц используется давно. В предыдущих работах авторов метод усреднения по обменным полям был применен к анализу магнитных свойств чистых и разбавленных магнетиков.

В настоящей работе сформулированы и доказаны соотношения, на которых может быть основан метод усреднения по обменным полям применительно к кластерам из нескольких спинов. Применение полученных соотношений к модели Изинга с разбавлением по связям позволило построить для этой модели (в качестве примера) два варианта приближенных методов. Полученная в этих приближениях намагниченность при нулевой температуре сравнивается с вероятностью того, что узел разбавленной по связям решетки Бете принадлежит бесконечному кластеру. В этих же приближениях найдена и магнитная восприимчивость разбавленного изинговского магнетика. В обоих приближениях в области отсутствия спонтанной намагниченности для восприимчивости в нулевом внешнем поле получается один и тот же результат. В области спонтанной намагниченности восприимчивость в различных приближениях получается различной, однако ее асимптотическое поведение одинаково в обоих приближениях.

Ключевые слова и словосочетания: фазовые переходы; модель Изинга; разбавленный магнетик.

---

[1] Сёмкин Сергей Викторович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий и систем; e-mail: Li15@rambler.ru

[2] Смагин Виктор Павлович – д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. лаборатории фундаментальной и прикладной физики; e-mail: Li15@rambler.ru

S.V. Semkin

V.P. Smagin

Vladivostok State University of Economics and Service
Vladivostok. Russia

Asymptotic behavior of the susceptibility and magnetization of a diluted Ising magnet

It is known that the properties of dilute and disordered magnets differ from the properties of pure magnets. However, exact solutions for models of magnetic systems with dilution have not yet been obtained. Therefore, it makes sense to construct approximate solutions for dilute magnets. Some of these solutions can be constructed by averaging over the interaction fields.

The application of the distribution function over interaction fields to the study of the properties of a system of many interacting particles has been used for a long time. In previous works of the authors, the method of averaging over exchange fields was applied to the analysis of the magnetic properties of pure and diluted magnets.

In this paper, we formulate and prove the relations on which the method of averaging over exchange fields can be based on clusters of several spins. Application of the obtained relations to the Ising model with bond dilution allowed us to construct two variants of approximate methods for this model (as an example). The magnetization obtained in these approximations at zero temperature is compared with the probability that the site of a Bethe lattice diluted in bonds belongs to an infinite cluster.

In the same approximations, the magnetic susceptibility of a diluted Ising magnet was also found. In both approximations, in the region of the absence of spontaneous magnetization for susceptibility in a zero external field, the same result is obtained. In the region of spontaneous magnetization, the susceptibility in different approximations is different, but its asymptotic behavior is the same in both approximations.

Keywords: phase transitions, Ising model, diluted magnet.

Построим решетку Бете следующим способом [1]. Рассмотрим центральный узел 0, соединим его с q новыми узлами, которые будем называть «первой оболочкой». Последующие оболочки определим рекуррентной процедурой: оболочка $r + 1$ строится присоединением $q - 1$ новых узлов к каждому из узлов оболочки r. Проделав эту процедуру N раз, получим так называемое дерево Кейли, внутренняя часть которого при $N \to \infty$ и является решеткой Бете.

Рассмотрим модель Изинга на решетке Бете. Пусть в каждом узле решетки Бете находится изинговский спин $\sigma_i = \pm 1$, где i – номер узла. Будем считать, что спины σ_i и σ_j, находящиеся в соседних узлах, взаимодействуют с энергией $-J\sigma_i\sigma_j$ где J – обменный интеграл. Кроме того, предположим, что система находится во внешнем поле $H_в$, так что ее гамильтониан есть

$$E = -J\sum \sigma_i\sigma_j - H_в \sum \sigma_i \ . \tag{1}$$

Модель Изинга с гамильтонианом (1) имеет на решетке Бете известное решение (то есть выражение для термодинамического среднего σ_i) [1], которое можно рассматривать и как точное решение на решетке Бете, и как приближенное решение на произвольной решетке с координационным числом *q* (приближение Бете) [1].

Предположим теперь, что некоторая часть обменных интегралов в (1) искусственно исключена, то есть для каждой пары соседних спинов σ_i и σ_j слагаемое $-J\sigma_i\sigma_j$ с вероятностью *b* присутствует в гамильтониане и с вероятностью $1-b$ отсутствует. Тогда гамильтониан системы можно представить в виде:

$$E(b) = -J\sum \xi_{ij}\sigma_i\sigma_j - H_в \sum \sigma_i \,, \qquad (2)$$

где ξ_{ij} – независимые случайные величины, каждая из которых принимает значение 1 с вероятностью *b* и значение 0 с вероятностью $1-b$. Модель Изинга с гамильтонианом (2) называется обычно моделью с разбавлением по связям [2]. В отличие от модели Изинга без разбавления (1) для модели с разбавлением по связям не найдено точного решения для какой-либо решетки, в том числе и для решетки Бете. (Впрочем, за одним исключением – можно построить точное решение для одномерной цепочки изинговских спинов с немагнитным разбавлением [3], которую можно рассматривать как решетку Бете с $q = 2$.) Однако можно построить приближенные решения для модели Изинга с разбавлением, в том числе и для решетки Бете с произвольным значением *q*. Эти приближенные решения можно построить основываясь на следующем, довольно простом рассуждении, применимом, в принципе, к модели Изинга на любой решетке. Рассмотрим некоторый узел решетки с координационным числом *q*, содержащий спин σ_0. Обозначим *r* множество из *q* спинов σ_j, соседних к σ_0, и обозначим *S* множество всех остальных спинов решетки. Равновесное среднее значение спина σ_0 вычисляется следующим образом:

$$\langle \sigma_0 \rangle = \frac{\sum \sigma_0 \exp\left(-\frac{E(b)}{kT}\right)}{Z} \,, \qquad (3)$$

где $Z = \sum \exp\left(\frac{-E(b)}{kT}\right)$,

T – абсолютная температура,

k – постоянная Больцмана.

Воспользуемся тем обстоятельством, что в гамильтониане (2) можно выделить слагаемое, содержащее σ_0:

$$E(b) = E_o(\sigma_o, r) + E_s(r, s) \,.$$

Тогда (3) можно переписать в следующем виде:

$$\langle \sigma_o \rangle = \frac{1}{Z}\sum_r \left(\sum_{\sigma_o} \sigma_o \exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)\right)\sum_s \exp\left(\frac{E_s}{kT}\right)$$

или

$$\langle\sigma_0\rangle = \frac{1}{Z}\sum_r\left(\left(\frac{\sum_{\sigma_0}\sigma_0\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)}{\sum_{\sigma_0}\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)}\right)\sum_{\sigma_o s}\exp\left(-\frac{E(b)}{kT}\right)\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{Z}\sum\sigma_{os}\exp\left(-\frac{E(b)}{kT}\right) = W(r),$$

есть вероятность того, что спины множества r имеют определенные значения, получим:

$$\langle\sigma_o\rangle = \sum_r\left(\frac{\sum_{\sigma_o}\sigma_o\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)}{\sum_{\sigma_0}\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)}\right)W(r).$$

Другими словами, равновесное среднее значение любого спина σ_0 в решетке может быть вычислено так. Зафиксируем значения соседних к нему спинов (составляющих множество r). При этих фиксированных значениях, рассматриваемых как постоянные, вычислим условное среднее значение σ_0, равное $\frac{\sum\sigma_0\sigma_0\exp\left(-\frac{E_o}{kT}\right)}{\sum\sigma_0\exp\left(-\frac{E_o}{kT}\right)}$. Это условное среднее следует теперь усреднить по всем возможным конфигурациям соседних спинов, что, разумеется, эквивалентно усреднению по термодинамическому ансамблю. Такое представление для $\langle\sigma_o\rangle$ справедливо, конечно же, не только для модели Изинга чистого или разбавленного магнетиков, но и для любой решеточной модели, в гамильтониане которой можно выделить множество «граничных» спинов r, отделяющих «внутренний» спин σ_0 от «внешних» спинов s. Для модели Изинга с разбавлением по связям $E_0(\sigma_0, r) = -\sigma_0(J\sum_j \xi_{0i}\sigma_j + H_в)$ и

$$\langle\sigma_o\rangle = \sum_r th\left(K\sum_j\xi_{oj}\sigma_j + h_в\right)W(r). \quad (4)$$

Здесь $K = \frac{J}{kT}$, $h_в = \frac{H_в}{kT}$. В выражении (4) можно перейти к суммированию по значениям переменной $h = \sum_j \xi_{0i}\sigma_j$, которую мы в дальнейшем будем называть *полем взаимодействия*. Введя функцию распределения поля взаимодействия

$$W(h) = \sum_r\delta\left(h - \sum_j\xi_{oi}\sigma_j\right)W(r),$$

где δ – дельта-функция, запишем (4) в виде:

$$\langle \delta_o \rangle = \int th(Kh + h_в)W(h)dh\,. \qquad (5)$$

Для магнетика с разбавлением *W(h)*, а следовательно и $\langle \sigma_o \rangle$, оказываются зависящими от макроскопически большого числа случайных переменных ξ_{ij}. Поэтому для вычисления наблюдаемой величины – макроскопической намагниченности M – следует усреднить (5) по всем возможным конфигурациям случайных переменных ξ_{ij}. (Для достаточно большой решетки, в соответствии с идеей самоусреднения [4], это эквивалентно усреднению по всем узлам решетки при определенных значениях переменных ξ_{ij}.) Поскольку $th(Kh + h_в)$ не зависит от переменных ξ_{ij}, усреднение в (5) приведет к замене $W(h)$ «средней» функцией распределения $\overline{W}(h)$:

$$Ь = \int th(Kh + h_в)\overline{W}(h)dh\,. \qquad (6)$$

Рассмотрим теперь два соседних спина решетки σ_1 и σ_2. Рассуждая так же, как и для одного спина, получим для среднего значения спина такого димера:

$$\left\langle \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right\rangle = \int \frac{sh(K(h_1 + h_2) + 2h_в)W(h_1, h_2)dh_1 dh_2}{ch(K(h_1 + h_2) + 2h_в) + \exp(-2K\xi_{12})ch(K(h_1 - h_2))}$$

Здесь h_1 и h_2 – поля взаимодействия, определяемые аналогично полю h для одного спина. Проводя теперь усреднение по значениям переменных ξ_{ij}, получим:

$$M = \frac{(1-b)}{2}\int (th(Kh_1 + h_в) + th(Kh_2 + h_в))\overline{W}_1(h_1, h_2)dh_1 dh_2 + \qquad (7)$$

Здесь $\overline{W_1(h_1, h_2)}$ и $\overline{W_2(h_1, h_2)}$ – усредненные функции распределения полей взаимодействия для димера с разорванной и не разорванной связью соответственно.

Используя кластеры, состоящие из произвольного числа спинов, можно получить для них выражения для *M*, аналогичные (6) и (7). Кроме того, для кластеров, содержащих более одного спина, можно получить выражения для средних значений функций нескольких спинов, таких, например, как спиновые ковариации.

Вычисление намагниченности в модели Изинга с разбавлением непосредственно по формулам (6) или (7) возможно, только если известны соответствующие функции распределения полей взаимодействия. Как видно из этих формул, нахождение функций распределения фактически эквивалентно точному решению задачи. Однако формулы (6) и (7) (или формулы, которые можно аналогичным способом получить для кластеров с большим числом атомов) можно использовать для построения приближенных методов нахождения намагниченности в модели Изинга с разбавлением. Для этого нужно принять те или иные приближения для функций распределения $\overline{W}(h)$, $\overline{W_1(h_1, h_2)}$ и $\overline{W_2(h_1, h_2)}$, входящих в формулы (6) и (7). В настоящей работе мы рассмотрим два варианта таких приближений.

Самым простым (и грубым) приближением представляется замена усреднения по полям в (6) и (7) подстановкой средних значений этих полей. Иными словами, функции распределения в (6) и (7) возьмем в следующем виде:

$$\overline{W}(h)=\delta(h-h_a) \text{ и } \overline{W}_1(h_1,h_2)=\overline{W}_2(h_1,h_2)=\delta(h_1-h_{1a})\delta(h_2-h_{2a})\ .$$

В отношении средних полей h_a, h_{1a} и h_{2a} примем следующие предположения. Будем считать $h_{1a}=h_{2a}$, а величины полей будем считать пропорциональными количеству внешних соседних узлов: $h_{1a}/h_a=\dfrac{q-1}{q}$. Обозначив x коэффициент этой пропорциональности, из (6) получим:

$$M=th(Kqx+h_{вх})\ , \tag{8}$$

где x определяется из уравнения, полученного приравниванием правых частей (6) и (7) с подставленными в них приближенными выражениями для функций распределения:

$$th(Kqx+h_{вх})=(1-b)th(K(q-1)x+h_{вх})+b\frac{sh(2K(q-1)x+2h_{вх}}{ch(2K(q-1)x+2h_{вх})+e^{-2K}}. \tag{9}$$

Оказывается, что приближение (9) для чистого магнетика (b = 1 является точным решением для модели Изинга на решетке Бете, а при $b<1$ его можно рассматривать как «псевдохаотическое» приближение для модели Изинга с немагнитным разбавлением на решетке Бете [5]. (Псевдохаотическое приближение получается из решения задачи с подвижными немагнитными примесями при наложении дополнительного условия равенства нулю корреляции в расположении примесей в соседних узлах решетки [Там же].)

Другое приближение для функций распределения, входящих в (6) и (7), состоит в следующем [6]. У каждого i-го узла разбавленной по связям решетки есть k связанных с этим узлом соседей. Это случайное число, принимающее значения от 0 до q и при случайном и некоррелированном расположении разорванных связей в решетке распределенное по биноминальному закону. Следовательно, функцию $\overline{W}(h)$, входящую в (6), всегда можно представить в виде:

$$\overline{W}(h)=\sum_{k=0}^{q}C_q^k b^k(1-b)^{q-k}W^{(k)}(h,b)\ ,$$

где $W^{(k)}(h,b)$ – условная функция распределения по полям взаимодействия при условии, что у узла есть ровно k связанных с ним соседних узлов.

Аналогично, функции $W_{1,2}(h_1,h_2,b)$, входящие в выражение (7), можно представить в виде:

$$\overline{W}_{1,2}(h_1,h_2)=\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{l=0}^{q-1}C_{q-1}^p C_{q-1}^l b^{p+l}(1-b)^{2(q-1)-(p+l)}W_{1,2}^{(p,l)}(h_1,h_2,b)\ .$$

Построим теперь следующее приближение. Заменим усреднение по условным функциям распределения $W^{(k)}$ и $W_{1,2}^{(p,l)}$ подстановкой в соответствующие выражения условных средних. Иными словами, возьмем условные функции распределения в виде:

$$W^{(k)}(h,b) = \delta(h - h_a^{(k)} \text{ и}$$

$$W_1^{(p,l)}(h_1,h_2,b) = W_2^{p,l}(h_1,h_2,b) = \delta(h_1 - h_{1a}^{(p)})\delta(h_2 - h_{2a}^{(l)}.$$

Будем считать, что средние значения полей $h_a^{(k)}$, $h_{1a}^{(p)}$ и $h_{2a}^{(l)}$ пропорциональны значениям k, ρ и l соответственно с одним и тем же коэффициентом пропорциональности, который обозначим y. Тогда из (6) и (7) получим:

$$M = \sum_{k=0}^{q} C_q^k b^k (1-b)^{q-k} th(Kk + h_{вх}), \tag{10}$$

где y определяется из уравнения

$$\sum_{k=0}^{q} C_q^k b^k (1-b)^{q-k} th(Kky + h_{ex}) = (1-b) \sum_{\rho=0}^{q-1} C_{q-1}^{\rho} b^{\rho} (1-b)^{q-1-\rho} th(K\rho y + h_{ex}) +$$

$$+ b\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{l=0}^{q-1} C_{q-1}^{p} C_{q-1}^{l} b^{p+1}(1-b)^{2(q-1)-(p+l)} \frac{sh(K(p+l)y + 2h_{ex})}{ch(K(p+l)y + 2h_{ex}) + e^{-zK} ch(K(p-l)y)}. \tag{11}$$

Приближение (10), (11) в дальнейшем будем называть «биноминальным». Рассмотрим основные свойства биноминального приближения (10), (11). Во первых заметим, что для чистого магнетика (b = 1) приближение (10), (11) совпадает с (8), (9) и является, таким образом, точным решением для модели Изинга на решетке Бете. Есть еще одно сходство между приближениями (10), (11) и (8), (9), а именно: если для приближения (8), (9) найти критическое значение параметра $K = K_c$, при котором исчезает ненулевой корень (9) для $h_{вх} = 0$, получим [7]:

$$K_c = \frac{1}{2}\ln\frac{b + b_c}{b - b_c},\ b_c = \frac{1}{q-1}. \tag{12}$$

Используя (11), нетрудно показать, что в биноминальном приближении для критического значения параметра K_c и перколяционного порога b_c получается точно такой же результат (12). Однако в общем случае приближения (8), (9) и (10), (11) не совпадают.

К сожалению, не удается построить точное решение для модели Изинга с разбавлением даже для решетки Бете с $q > 2$. Но для решетки Бете с разбавлением можно сравнительно просто найти вероятность $P_o(b)$ того, что случайно взятый узел решетки принадлежит бесконечному кластеру [2]:

$$P_o(b) = 1 - Z^q, \tag{13}$$

где Z – корень уравнения $\sum_{i=0}^{q-2} Z^i = \frac{1}{b}$

Известно, что средняя спонтанная намагниченность в модели Изинга с разбавлением при $T \to 0$ ($K \to \infty$) должна быть равна $P_o(b)$ [2]. Поскольку приближения (8), (9) и (10), (11) при $b = 1$ есть точные решения для модели Изинга на решетке Бете, то при $b < 1$ на них можно смотреть как на приближенные решения для модели Изинга с разбавлением для этой решетки. Поэтому имеет смысл сравнить вероятность $P_o(b)$ со спонтанной намагниченностью в этих приближениях при $K \to \infty$.

Численный расчет показывает, что разница вероятности $P_o(b)$ и намагниченности, вычисленной при $T \to 0$ для биноминального приближения ($M_0^{bin}(b)$), меньше, чем для псевдохаотического ($M_0^{ph}(b)$). Однако есть качественное различие в поведении намагниченностей $M_0^{ph}(b)$ и $M_0^{bin}(b)$, с одной стороны, и вероятности $P_o(b)$ – с другой, вблизи порога протекания $b_c = \dfrac{1}{q-1}$. Из (13) легко получить, что при $b \to b_c$ вероятность $P_o(b)$ пропорциональна разнице $b - b_c$ и приближенно равна:

$$P_o(b) \approx \frac{2q(q-1)}{((q-2))(b-b_c)}. \qquad (14)$$

Построим теперь асимптотические выражения для $M_0^{ph}(b)$ и $M_0^{bin}(b)$ при $b \to b_c$. Из (8), (9) получим при $K \to \infty$

$$M_0^{ph}(b) = th(q\tilde{x})$$

$$th(q\tilde{x}) = (1-b)th((q-1)\tilde{x}) + bth(2(q-1)\tilde{x})$$

где $\tilde{x} = \lim\limits_{K\to\infty} Kx$.

Разлагая в этих выражениях гиперболический тангенс при малых значения аргумента, получим:

$$M_0^{ph}(b) \approx \sqrt[q]{\frac{3(q-1)}{(q-2)(4q-3)}}\sqrt{b-b_c}. \qquad (15)$$

Аналогично

$$M_0^{bin}(b) \approx \sqrt[q]{\frac{3(q-q)}{(q-2)(7q-9}}\sqrt{b-b_c}. \qquad (16)$$

Иначе говоря, при $b \to b_c$ $M_0^{ph}(b)$ и $M_0^{bin}(b)$ пропорциональны квадратному корню величины $b - b_c$, а $P_0(b)$ пропорциональна первой степени этой величины.

Дифференцируя (8) и (9) по $h_{вх}$, найдем магнитную восприимчивость при $M = 0$, т.е. при $h_{вх} = 0$ и $K < K_c(b)$:

$$\chi = b_c \frac{1 + bthK}{b_c - bthK},$$

где $b_c = \dfrac{1}{q-1}$. (17)

Нетрудно показать, что и в биноминальном приближении (10), (11) для восприимчивости в нулевом внешнем поле в парамагнитной области $K < K_c(b)$ получается такой же результат (17). Поведение восприимчивости (17) вблизи границы парамагнитной области определяется асимптотическим выражением:

$$\chi \approx \frac{1}{2} A(T_c - T)^{-1}, \ A = \frac{bb_c(1+b_c)}{(b^2 - b_c^2)(ath\frac{b_c}{b})^2} , \tag{18}$$

где $T = 1/K$, $T_c = \dfrac{1}{K_c(b)}$.

В области существования спонтанной намагниченности $K > K_c(b)$ $T < T_c$ восприимчивости в псевдохаотическом и биноминальном приближениях уже не совпадают, однако при $T \to T_c$ для них получается одинаковое асимптотическое выражение:

$$\chi \approx \frac{1}{2} A(T_c - T)^{-1}. \tag{19}$$

Есть основания полагать, что выражение (17), определяющее восприимчивость разбавленного изинговского магнетика на решетке Бете в парамагнитной области, является точным выражением для этой модели [3]. Можно предположить, что и асимптотическое выражение (19) (включая численный коэффициент при $(T_c - T)^{-1}$ также является точным результатом для этой модели.

1. Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике. – Москва: Мир, 1985. – 486 с.
2. Займан Дж. Модели беспорядка // Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем. – Москва: Мир, 1982. – 591 с.
3. Сёмкин С. В., Смагин В. П., Гусев Е. Г. Магнитная восприимчивость разбавленного изинговского магнетика // Теоретическая и математическая физика. 2019. Т. 201, №. 2. С. 280–290.
4. Доценко В.С. Критические явления в спиновых системах с беспорядком // Успехи физических наук. 1995. Т. 165 (5). С. 481–528.
5. Сёмкин С.В., Смагин В.П. Модель Поттса на решетке Бете с немагнитными примесями // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2015. Т. 148, №4. С. 729–733.
6. Сёмкин С.В., Смагин В.П. Кластерный способ построения приближения Бете для модели Изинга разбавленного магнетика // Известия вузов. Физика. 2017. Т. 60, Вып. 10. С. 140–145.
7. Сёмкин С.В., Смагин В.П. Приближение Бете в модели Изинга с подвижными примесями // Физика твердого тела. 2015. Т. 57, №5. С. 926–931.

Транслитерация

1. Bekster R. Tochno reshaemye modeli v statisticheskoj mekhanike. – Moskva: Mir, 1985. – 486 p.
2. Zajman Dzh. Modeli besporyadka: Teoreticheskaya fizika odnorodno neuporyadochennyh siste. – Moskva: Mir, 1982. – 591 p.
3. Sëmkin S. V., Smagin V. P., Gusev E. G. Magnitnaya vospriimchivost' razbavlennogo izingovskogo magnetika // Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika. 2019. T. 201, №. 2. P. 280–290.
4. Docenko V. S. Kriticheskie yavleniya v spinovyh sistemah s besporyadkom // Uspekhi fizicheskih nauk. 1995. T. 165 (5). P. 481–528.
5. Semkin S. V., Smagin V. P. Model' Pottsa na reshetke Bete s nemagnitnymi primesyami // Zhurnal eksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki. 2015. T. 148, №4. P. 729–733.
6. Syomkin S. V., Smagin V. P. Klasternyj sposob postroeniya priblizheniya Bete dlya modeli Izinga razbavlennogo magnetika // Izvestiya vuzov. Fizika. 2017. T. 60, Vyp. 10. P. 140–145.
7. Syomkin S.V., Smagin V.P. Priblizhenie Bete v modeli Izinga s podvizhnymi primesyami // Fizika tverdogo tela. 2015. T. 57, №5. P. 926–931.

Для цитирования: Сёмкин С.В., Смагин В.П. Асимптотическое поведение восприимчивости и намагниченности разбавленного изинговского магнетика // Территория новых возможностей. Вестник Владивостокского государственного университета экономики и сервиса. 2020. Т. 12, № 1. С. 105–114.

For citation: Semkin S.V., Smagin V.P. Asymptotic behavior of the susceptibility and magnetization of a diluted Ising magnet, *The Territory of New Opportunities. The Herald of Vladivostok State University of Economics and Service*, 2020, Vol. 12, № 4, pp. 105–114.

DOI dx.doi.org/10.24866/VVSU/2073-3984/2020-1/105-114

Дата поступления: 13.02.2020.