ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА С НЕМАГНИТНЫМ РАЗБАВЛЕНИЕМ

К.ф.-м.н., С.В. Сёмкин, ВГУЭС, г. Владивосток,
Д.ф.-м.н., В.П. Смагин, ВГУЭС, г. Владивосток

Известно [1], что критическое поведение разбавленных или аморфных магнетиков может сильно отличаться от критического поведения магнетиков, имеющих трансляционную симметрию решетки. Однако, даже для простых моделей магнетика с разбавлением, например, для модели Изинга с немагнитными примесями, не удается построить точного решения для плоских или объемных решеток. В настоящей работе мы рассмотрим полученное нами точное решение для одномерной модели Изинга с немагнитным разбавлением.

Рассмотрим одномерный изинговский магнетик (цепочку), в котором некоторые магнитные атомы заменены на неподвижные немагнитные примеси, так что вероятность обнаружить в любом узле цепочки магнитный атом равна b, а вероятность обнаружить там примесь $1-b$. При таком разбавлении цепочка разбивается на отрезки магнитных атомов разной длины, разделенные немагнитными примесями. Среднее значение изинговского спина, в расчете на один магнитный атом (намагниченность) может быть вычислена так:

$$M=\sum_{n=1}^{\infty} m_n p_n$$

где m_n - средняя намагниченность атома отрезка длиной n, а p_n - вероятность того, что произвольно взятый магнитный атом принадлежит такому отрезку. Очевидно, что $p_n=n b^{n-1}(1-b)^2$, а намагниченность m_n вычислим следующим образом. Пусть Z_n – статистическая сумма для отрезка из n изинговских спинов $\sigma_1,\sigma_2,\dots\sigma_n$

$$K\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$

$$\exp(¿+h\sum_{i=1}^{n}\sigma_i)=F_n(+1)+F_n(-1)$$

$$Z_n=\sum_{\sigma_1,\dots\sigma_n} ¿$$

где

$$K\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$

$$\exp(¿+h\sum_{i=1}^{n}\sigma_i)$$

$$F_n(\sigma_n)=\sum_{\sigma_1,\dots\sigma_{n-1}} ¿$$

Здесь $K=J/kT$ (J - обменный интеграл, T – температура, k - постоянная Больцмана), $h=H_{ex}/kT$ (H_{ex} - внешнее поле). Эти безразмерные параметры имеют простой смысл: K показывает отношение энергии обменного взаимодействия к тепловой энергии, а h - отношение энергии взаимодействия спина с внешним полем к тепловой. Тогда

$$m_n=\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial h}\ln Z_n=\frac{1}{n}\frac{F_{n,h}(+1)+F_{n,h}(-1)}{F_n(+1)+F_n(-1)}$$

Для величин $F_n(\pm 1)$ и их производных по h $F_{n,h}(\pm 1)$ можно составить рекуррентные соотношения:

$$F_{n+1}(\sigma)=\sum_{\sigma'=\pm 1}F_n(\sigma')e^{K\sigma\sigma'+h\sigma}=F_n(+1)e^{K\sigma+h\sigma}+F_n(-1)e^{-K\sigma+h\sigma}$$

$$F_{n+1,h}(\sigma)=(F_{n,h}(+1)+\sigma F_n(+1))e^{K\sigma+h\sigma}+(F_{n,h}(-1)+\sigma F_n(-1))e^{-K\sigma+h\sigma}$$

$$F_1(+1)=F_{1,h}(+1)=e^h \quad , \quad F_1(-1)=e^{-h} \quad , \quad F_{1,h}(-1)=-e^{-h}$$

Вводя обозначения

$$x_n=F_n(-1)/F_n(+1) \quad , \quad y_n=F_{n,h}(+1)/F_n(+1) \quad \text{и} \quad z_n=F_{n,h}(-1)/F_n(+1)$$

получим

$$m_n=\frac{1}{n}\frac{y_n+z_n}{1+x_n} \quad ,$$

$$x_{n+1}=\frac{e^{-2K}+x_n}{1+x_n e^{-2K}}e^{-2h} \quad , \quad y_{n+1}=\frac{y_n+z_n e^{-2K}}{1+x_n e^{-2K}}+1 \quad , \quad z_{n+1}=\frac{z_n+y_n e^{-2K}}{1+x_n e^{-2K}}e^{-2h}-x_{n+1}$$

$$x_1=e^{-2h} \quad , \quad y_1=1 \quad , \quad z_1=-e^{-2h}$$

Выражение для намагниченности M можно представить в виде степенного ряда по концентрации магнитных атомов b :

$$(k+1)m_{k+1}-2k$$
$$(\text{¿}m_k+(k-1)m_{k-1})b^k$$
$$M=m_1+2(m_2-m_1)b+\sum_{k=2}^{\infty}\text{¿}$$

из которого можно найти производные $\frac{\partial^k M}{\partial b^k}$ при $b=0$. В частности

$$\left.\frac{\partial M}{\partial b}\right|_{b=0}=2(m_2-m_1)=2\left(\frac{sh(2h)}{ch(2h)+e^{-2K}}-th(h)\right)$$

Аналогично вычисляется среднее значение произведения спинов соседних магнитных атомов.

$$S=\sum_{n=2}^{\infty}s_n\tilde{p}_n$$

где s_n - среднее значение произведения спинов, принадлежащих отрезку длиной n , а $\tilde{p}_n$ - вероятность того, что пара соседних магнитных атомов принадлежит такому отрезку. $\tilde{p}_n=(n-1)b^{n-2}(1-b)^2$, а s_n найдем так

$$s_n=\frac{1}{n-1}\frac{\partial}{\partial K}\ln Z_n=\frac{1}{n-1}\frac{F_{n,K}(+1)+F_{n,K}(-1)}{F_n(+1)+F_n(-1)}$$

Вводя обозначения $t_n=F_{n,h}(+1)/F_n(+1)$ и $w_n=F_{n,h}(-1)/F_n(+1)$ получим

$$s_n=\frac{1}{n-1}\frac{t_n+w_n}{1+x_n}$$

$$t_{n+1}=\frac{t_n+w_n e^{-2K}}{1+x_n e^{-2K}}+\frac{1-x_n e^{-2K}}{1+x_n e^{-2K}} \quad , \quad w_{n+1}=\frac{w_n+t_n e^{-2K}}{1+x_n e^{-2K}}e^{-2h}-\frac{e^{-2K}-x_n}{1+x_n e^{-2K}}e^{-2h}$$

$$x_2=\frac{ch(-K+h)}{ch(K+h)}e^{-2h} \quad , \quad t_2=th(K+h) \quad , \quad w_2=-\frac{sh(-K+h)}{ch(K+h)}e^{-2h}$$

Если $h=0$, то все $m_n=0$, а все $s_n=th\,K$, поэтому $M=0$ и $S=th\,K$. Можно также представить S в виде ряда по степеням b :

$$(k+1)s_{k+2}-2k$$
$$(\text{¿}s_{k+1}+(k-1)s_k)b^k$$
$$S=s_2+2(s_3-s_2)b+\sum_{k=2}^{\infty}\text{¿}$$

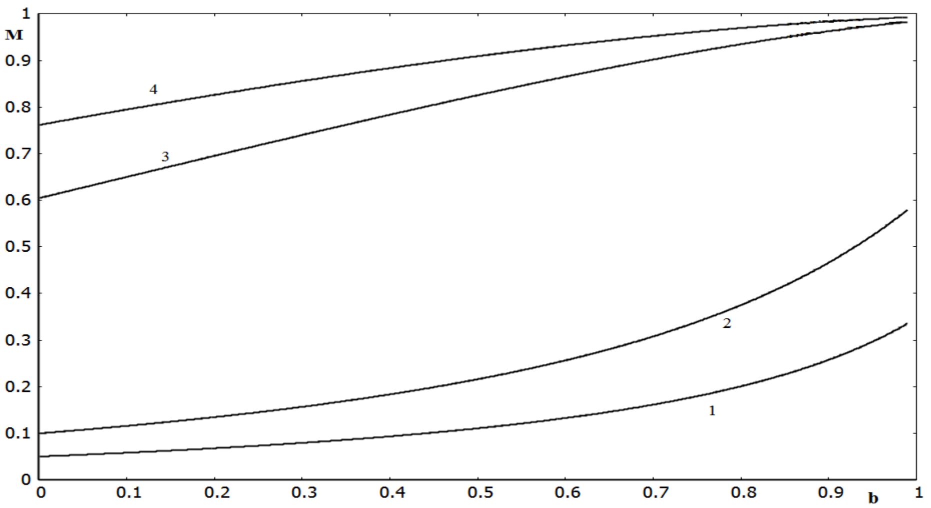

Рис. 1

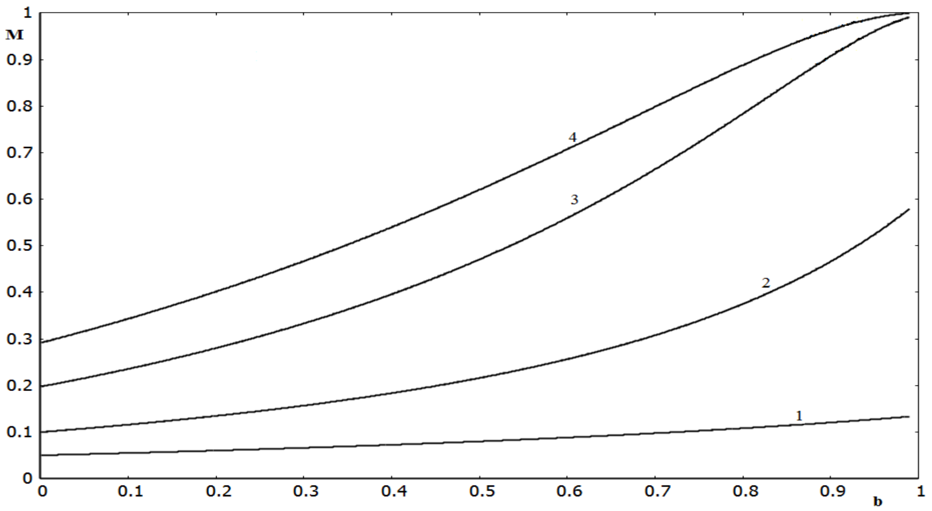

Рис. 2

На рис.1 показаны зависимости намагниченности M от концентрации магнитных атомов b, вычисленные при одинаковых значениях параметра $K=1$, но при различных значениях внешнего поля. Кривые 1, 2, 3, 4 на этом рисунке соответствуют значениям h равным 0.05, 0.1, 0.7, 1.0.

На рис. 2 показаны зависимости намагниченности от концентрации магнитных атомов при одинаковом $H_{ex}=0.1K$ и различных K, равных 0.5, 1, 2 и 3 для кривых 1, 2, 3 и 4 соответственно.

Полученное точное решение можно использовать для оценки точности различных приближенных решений для модели Изинга разбавленного магнетика [2,3].

Литература

1. Займан Дж., Модели беспорядка: Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем, М. Мир 1982, 591 с.
2. С.В. Семкин, В.П. Смагин, «Одномерная модель Изинга с подвижными примесями», Вестник Владивостокского государственного университета экономики и сервиса, Владивосток 2016, № 2, с. 114-120.
3. С.В. Сёмкин, В.П. Смагин, Разбавленный изинговский магнетик на решетке Бете, Известия вузов.Физика, 2015, т. 58, вып. 12, с. 159 – 167